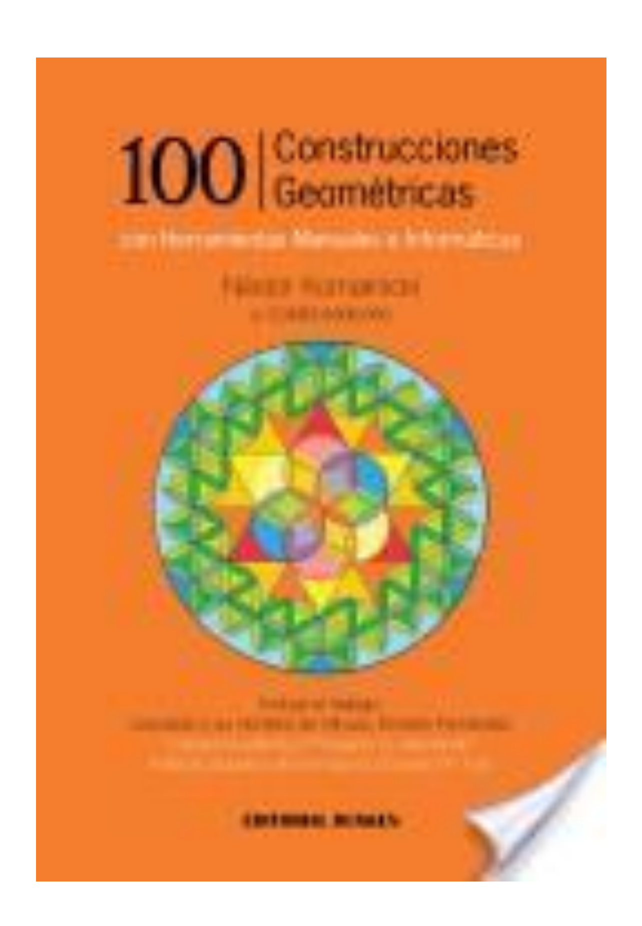
100 Construcciones Geométricas
con Herramientas Manuales e Informáticas
(primeros tres capítulos)

KOMARNICKI, Néstor Oscar
y Colaboradores



Unidad Académica “Próspero G. Alemandri”
Instituto Superior de Formación Docente N° 100
(Avellaneda)

EDITORIAL DUNKEN
Buenos Aires

2013

100 Construcciones Geométricas
con Herramientas Manuales e Informáticas
(primeros tres capítulos)

KOMARNICKI, Néstor Oscar
y Colaboradores

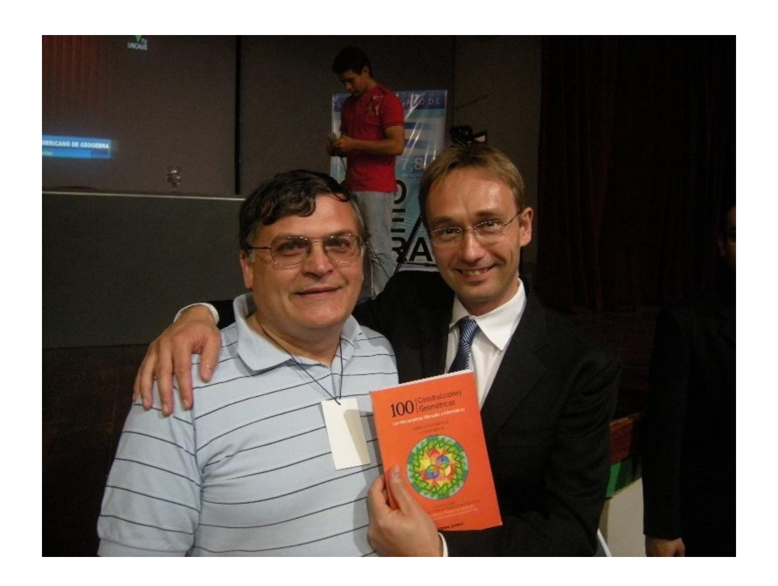


Foto con el creador del Programa GeoGebra, Dr Markus Hohenwarter

Unidad Académica "Próspero G. Alemandri"
Instituto Superior de Formación Docente N° 100
(Avellaneda)

EDITORIAL DUNKEN
Buenos Aires
2013

Colaboradoras/es:

Altamirano, Erika	Araoz, Mariana Sabrina
Benjasmin, Cintia	Bouclier, Natalia Noemí
Buraschi, Beatriz	Cejas, Melanie
Correa, Daniela	Díaz, Yesica
Enríquez, María Florencia	Gurrieri, Natalia
Jorge, Walter	Macri, Deborah
Mantovani, María Eugenia	Mosca, Melisa Paula
Mosquera, María Belén	Pardo, Giselle
Pereira, María Luz	Pogonza, Viviana
Roquero, Yael Desiree	Ru Ordoñez, Micaela
Silva, Giselle Sabrina	Sosa, Tatiana

Expresamos nuestro agradecimiento a:

Al Director de la Unidad Académica “Próspero G. Alemandri”, Prof. Roberto Casero.

A los profesores que nos han orientado: Camilo Díaz, Alberto Guzzetti, Margarita Rodríguez, Sonia Durand, Gustavo Zorzoli, Luis Garaventa y Ladislao Bodnar

A los profesores amigos: Guido Drassich, Lorena Rodríguez, Alejandro Montenegro, Nancy López y en general a toda la gente del I.S.F.D. N° 100 (Avellaneda).

Índice

1. CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

2. TRIÁNGULOS

3. SEGMENTOS DE LONGITUD IRRACIONAL

Los siguientes capítulos no se incluyen en el siguiente resumen:

4. POLÍGONOS

5. DESARROLLOS DE CUERPOS

6. PROBLEMAS DE APOLONIO

7. CÓNICAS

8. MOSAICOS O TESELACIONES

9. CURIOSIDADES Y PASATIEMPOS

10. CURVAS TRANSCENDENTES

11. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ANEXO

PRÓLOGO DEL COORDINADOR

En este libro decidimos afrontar el desafío de recuperar distintos saberes del campo de la geometría, una rama de la matemática que acompañó la evolución cultural y tecnológica de la sociedad, además de seguir ejerciendo un papel esencial en el desarrollo del pensamiento humano. Para cumplir ese objetivo fue necesario realizar una tarea que podemos denominar de *arqueología matemática*[1], porque debimos rastrear ediciones antiguas y agotadas de libros que encerraban conocimientos geométricos olvidados. Siendo fundamental en esta etapa, el aporte de muchos amigos libreros, que nos ayudaron a reconstruir el camino por el cual los estudiantes de los distintos niveles educativos accedían a los conocimientos geométricos en el pasado próximo. En esta búsqueda nos encontramos con el librero Ernesto Fernández, quien tuvo la gentileza de permitirnos incorporar un trabajo de su autoría, que nos conectó con algunos de los misterios de la matemática en el devenir histórico de la Civilización.

Así un trabajo que nació en la necesidad de cubrir un problema emergente de los/as estudiantes del Profesorado de Matemática del Instituto Superior de Formación Docente N° 100[2], quienes tenían dificultades en encontrar textos actuales de los niveles secundario y terciario con los conocimientos necesarios para orientar sus prácticas de enseñanza, cuando debían trabajar con saberes geométricos[3], nos permitió no solo reflexionar sobre las propias prácticas de enseñanza, sino que también, nos hizo acercarnos más a los aspectos culturales de la geometría. La alegría de reencontrarnos con las viejas construcciones geométricas, la posibilidad de incorporarlas a conocimientos contemporáneos y de resignificar otros contenidos de la matemática, nos llevaron a buscar la forma de compartir estos redescubrimientos, que creemos, no solo permitirán enriquecer las clases de matemática sino que también posibilitarán dar nuevos enfoques creativos tanto en ámbitos artísticos, como artesanales y técnicos.

El olvido de la geometría en los niveles educativos primario y secundario, fue ocasionado por la reforma iniciada en la década del sesenta con el auge de la llamada *Matemática Moderna*, cuando se le dio preferencia a la geometría

[1] Se hace referencia a la ubicación y consulta de fuentes que generalmente exceden el medio siglo de antigüedad y que se caracterizan por un enfoque matemático más centrado en la geometría, anterior al auge de la denominada *Matemática Moderna*.

[2] Instituto perteneciente a la Unidad Académica “Próspero G. Alemandri” de la Ciudad de Avellaneda (Provincia de Buenos Aires)

[3] En algunos casos, también se les solicitaba trabajar con el programa geométrico *GeoGebra* en dichas prácticas, lo que incentivó la investigación sobre la forma de elaborar estrategias que optimizaran el uso de este software educativo. En este punto debemos aclarar que este programa se caracteriza por permitir un planteo dinámico de la geometría, que esperamos desarrollar en una próxima publicación.

analítica y el álgebra, posiblemente con la intención de que los estudiantes pudieran acceder en forma temprana a un pensamiento más abstracto. Uno de los efectos de este nuevo paradigma fue el menosprecio de las representaciones geométricas porque se las suponía como casos particulares que no aportaban al proceso de construcción del pensamiento abstracto, aun cuando genios de la matemática como Poincaré (1854 - 1912) habían hecho afirmaciones como esta:

"Puede preguntarse por qué no puede estudiarse la geometría sin figuras…Antes de enunciar la ley, representaremos la experiencia en cuestión de una manera perceptible, despojándola también, …de todas las circunstancias accesorias …como un físico elimina en sus experiencias las fuentes de errores sistemáticos. Aquí es donde las figuras son necesarias, pero ellas son un instrumento apenas menos grosero que la tiza que sirve para trazarlas…nos servimos de ellas para estudiar algo que es más elevado y sutil.". [4] Las construcciones geométricas son casos particulares que sirven de referencia o de soporte a pensamientos más elevados, sino: ¿de qué manera construimos el conocimiento?

Esta última pregunta nos llevó a indagar, si era conveniente utilizar las construcciones geométricas como puerta de acceso a la geometría analítica y su contracara, si era posible sustentar la enseñanza de la geometría analítica solo desde el álgebra con pocos conocimientos geométricos, los resultados obtenidos por la enseñanza matemática actual, no parecen avalar esta última afirmación.

Luego del fracaso de la matemática moderna en la enseñanza de la matemática, se produjo la aparición de distintas escuelas didácticas (que buscaban crear nuevas alternativas) como la francesa (Brousseau, Chevallard, Artigue, Douady, entre otros) y la llamada holandesa, cuyos autores más reconocidos son: Hans Freudenthal y los esposos Van Hiele. Aunque algunos de estos especialistas destacaron la importancia de la geometría, no existió, en la práctica, una clara tendencia de remediar la ausencia de contenidos geométricos en la enseñanza.

¿Por qué enseñar geometría? Tal vez porque el Mundo artificial creado por el ser humano se presenta en forma geométrica, o porque el Mundo natural responde también a estas formas o a complejas estructuras fractales (entidades que también pertenecen a la geometría). Posiblemente porque el arte le debe mucho a la geometría, también la física (Issac Newton y Albert Einstein se basaron en ella) así como las otras ciencias naturales.

En los tiempos en que se ponía en duda los resultados de la Matemática Moderna, Morris Kline decía: "…*los textos modernos usuales sustituyen en gran parte la geometría sintética por la geometría analítica…"Abajo Euclides" y "fuera Euclides" parecen ser las consignas de las nuevas matemáticas. Tal paso sería trágico. La geometría sintética es una parte esencial de las matemáticas cuya*

[4] POINCARÉ, Henri y EINSTEIN, Albert – *Fundamentos de la Geometría* – Ed. Iberoamericana – Buenos Aires (1948) p.p. 92 y 93

base es la geometría euclídea,…la geometría proporciona la interpretación gráfica de la mayor parte del trabajo analítico. Los matemáticos piensan habitualmente en términos de imágenes, y la geometría no sólo proporciona imágenes, sino que sugiere nuevos teoremas analíticos…” [5] Estamos aquí en un punto donde es necesario pensar que los entes matemáticos son fruto de la imaginación que parte de la realidad, las construcciones geométricas están en un espacio intermedio entre la realidad y la abstracción matemática, sirviendo de puente entre los dos mundos.

También las construcciones geométricas tuvieron aplicaciones trascendentes en el Mundo del arte, sobre todo en las obras de los grandes maestros del Renacimiento, pero también en artistas modernos como Salvador Dalí, Maurits Cornelis Escher, Antoni Gaudí, entre muchos otros. Mientras que en el terreno de la técnica y la tecnología, sirven para transmitir ideas de proyectos a través de diagramas y planos. Desde el croquis con el que expresamos una idea a un sistema de planos de un complejo edilicio, su papel es insustituible en el desarrollo humano.

En esta obra los/as lectores/as deberán perdonar cierta falta de precisión en el lenguaje matemático que decidimos mantener en el texto para no entorpecer el desarrollo de las construcciones (por ejemplo, al establecer la igualdad de dos o más segmentos nos referimos en realidad a la igualdad de sus medidas). Hemos también preferido utilizar la denominación de los entes geométricos en la forma que lo hacia la vieja geometría, no por desmerecer a la Teoría de Conjuntos, sino para mantener el encanto de la tradición geométrica, de esta manera los puntos se denominan con letras latinas mayúsculas y las rectas con letras latinas minúsculas, por el mismo motivo hemos preferido utilizar la palabra *intersecar* en lugar de hablar de intersecciones lo que sería más apropiado dentro de un enfoque conjuntista.

Todos reconocemos la importancia de la geometría y muchos buscamos que los diseños curriculares la tengan en cuenta. De todas maneras nos sentimos obligados a aclarar que el retorno esperado, debería estar vinculado con las necesidades y realidades del Mundo Moderno. Hoy contamos con tecnología informática en el aula, programas educativos como el *GeoGebra*, nos permiten alcanzar una precisión imposible de obtener con los instrumentos manuales de geometría y también una mejor presentación de los resultados obtenidos.

En la actualidad la enseñanza afronta nuevos desafíos, uno de los cuales es poder interpretar la realidad del Mundo a través de la geometría en el aula, con la ayuda de las tecnologías informáticas. Nuestro trabajo es un aporte para buscar satisfacer esta necesidad.

---

[5] KLINE, Morris – *El fracaso de la Matemática Moderna* – *Por qué Juanito no sabe sumar* Siglo Veintiuno Editores – México (1986) – p.p. 189 y 190

1. CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

Cuando hablamos de construcciones geométricas debemos remitirnos a la Antigua Grecia y al cambio de concepción de la Geometría, es decir, al paso desde lo pragmático a la constitución de una ciencia basada en el razonamiento deductivo. En este capítulo presentamos las construcciones geométricas elementales basándonos en intersecar rectas y circunferencias. Hoy no sólo contamos con herramientas manuales para su construcción, también podemos trabajar con herramientas tecnológicas. En esta oportunidad utilizamos el software GeoGebra, pero conservando el método de construcción con rectas y circunferencias, lo que permite la opción de realizarlas mediante el uso de regla y compás.

1.1. Dado un segmento y un punto interno, trazar una recta perpendicular que pase por un punto

Marcar un segmento

y un punto C interno al mismo. Trazar una circunferencia con centro en el punto C y radio[6]

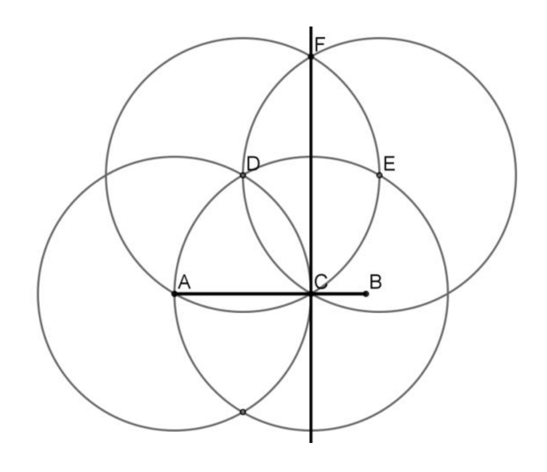
, a continuación una circunferencia con centro en A y radio

, que en su intersecado superior determina el punto D. Luego trazar una circunferencia con centro en D y radio

, que en su intersecado con la primera circunferencia determina el punto E. Seguidamente dibujar dos circunferencias con el mismo radio y centro en los puntos D y E. El intersecado superior de estas dos últimas circunferencias determina el punto F. Al Unir F con C mediante una recta, se encuentra la recta perpendicular al segmento

que pasa por el punto C.

[6] El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.



1.2. Dado un segmento y un punto externo, trazar una recta perpendicular que pase por el punto

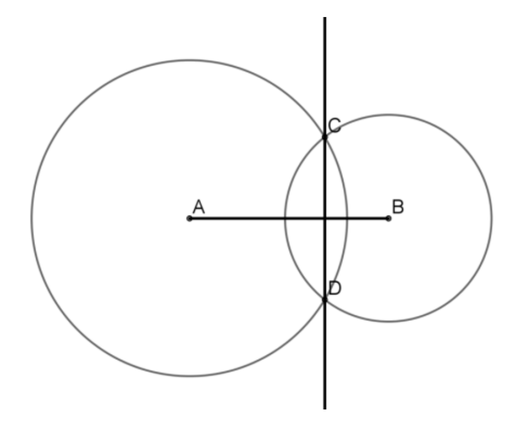
Trazar un segmento

y determinar un punto externo al segmento al que denominaremos C. Luego trazar una circunferencia con centro en B y radio

y otra con centro en A y radio

, dichas circunferencias se intersecan en sus partes inferiores determinando el punto D. Uniendo los puntos C y D obtenemos una recta perpendicular al segmento

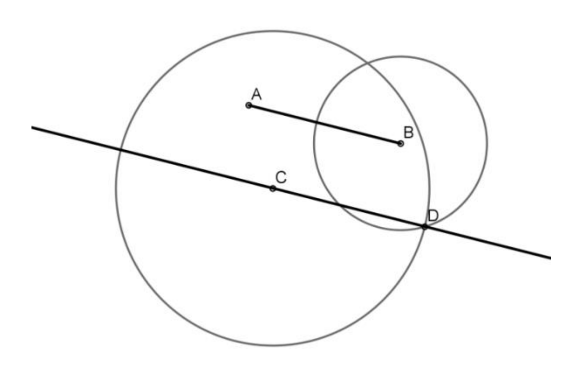
que pasa por C.



1.3. Dado un segmento y un punto externo, trazar una recta paralela que pase por el punto

Para esta construcción, determinamos un segmento

y un punto C exterior al mismo. Luego con centro en C trazamos una circunferencia de radio igual a , y otra circunferencia con centro en B y radio igual a la distancia entre el extremo A del segmento y el punto C, con esta construcción queda determinado un nuevo punto D. Trazando una recta que pase por los puntos C y D obtenemos la recta paralela buscada.

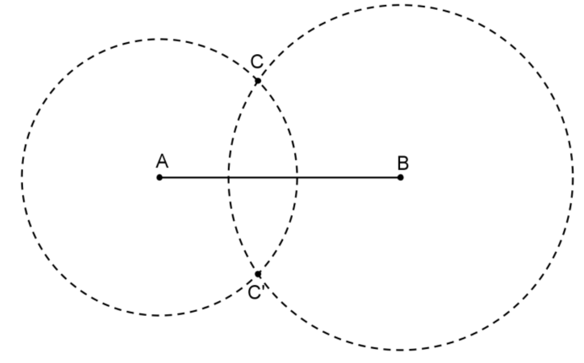


1.4. Dado un segmento y un punto exterior, hallar el punto simétrico al punto dado con respecto al segmento

Con centro en A determinamos una circunferencia con radio

, luego trazamos otra circunferencia con centro en B con radio

. Nos quedarán dos puntos (C y C') en el intersecado de las dos circunferencias, siendo los mismos, simétricos con respecto al segmento.



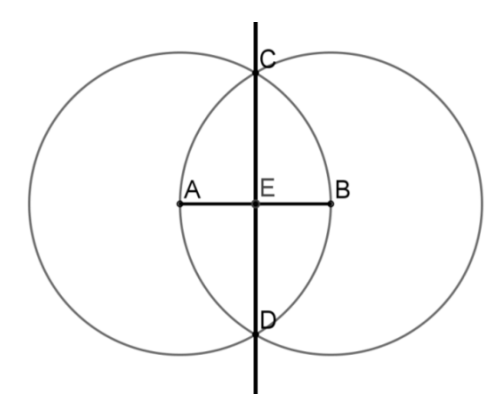
1.5. Dividir un segmento en dos partes iguales

Dado un segmento

, dibujamos dos circunferencias, una con centro en el punto A y radio

y otra con centro en punto B y radio

. Marcamos en el intersecado de ambas circunferencias los puntos C y D, y trazamos una recta que pase por dichos puntos que divide al segmento dado en dos partes iguales.

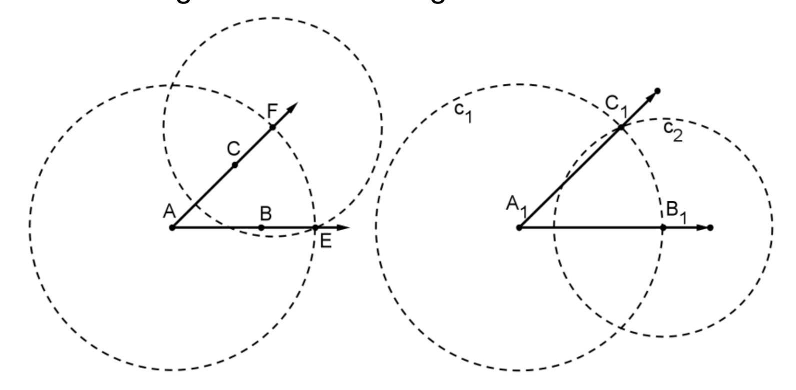


1.6. Dado un ángulo construir otro de igual amplitud

Dado un ángulo comenzamos por dibujar una circunferencia de un radio conveniente. Luego ubicamos los puntos E y F, que se encuentran en el intersecado de la circunferencia con los lados del ángulo. Para encontrar un ángulo congruente con

(con vértice en A_1) trazamos una semirrecta con origen en dicho vértice, después una circunferencia c_1 con centro en A_1 y radio , así obtenemos el punto B_1 (punto de intersecado de la semirrecta con la circunferencia c_1). Con centro en B_1 dibujar una nueva circunferencia c_2 con radio

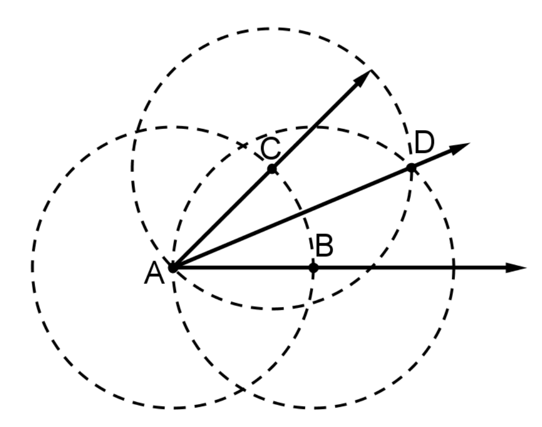
. En el cruce superior de las circunferencias c_1 y c_2 obtenemos el punto C_1 que al unirlo con A_1 nos da el segundo lado del ángulo



1.7. Trazar la bisectriz de un ángulo dado

Dado un ángulo agudo de cualquier amplitud con vértice en el punto A. Trazamos una circunferencia con centro en el punto A que en su intersecado con

ambos lados del ángulo, determina los puntos B y C. Con centro en dichos puntos, trazamos dos circunferencias de radio igual al de la circunferencia anterior, las que determinan el punto D en el intersecado interno al ángulo. Luego, trazamos una semirrecta con origen en A que pase por D, queda entonces determinada la bisectriz del ángulo.



1.8. Trisecar un ángulo recto

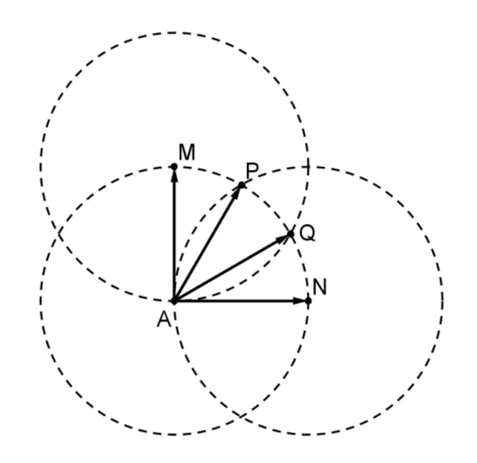
Con respecto a la trisección del ángulo recto, debemos señalar que no existe una construcción gráfica para realizar la trisección de cualquier ángulo, pero sí es posible trisecar un ángulo recto. Una vez construido el ángulo recto, trazamos una circunferencia de radio conveniente y centro en el vértice del ángulo, que intersecará sus lados en los puntos M y N. Trazamos otra circunferencia de igual radio con centro en N. El ángulo

mide 60º, por determinar los tres puntos (A, P y N) un triángulo equilátero, el ángulo

será su complementario y por lo tanto mide 30º. Dibujamos una nueva circunferencia del mismo radio que las anteriores con centro en M para obtener el punto Q. Tanto

como

son ángulos de 30º, quedando así determinada la trisección del ángulo recto.

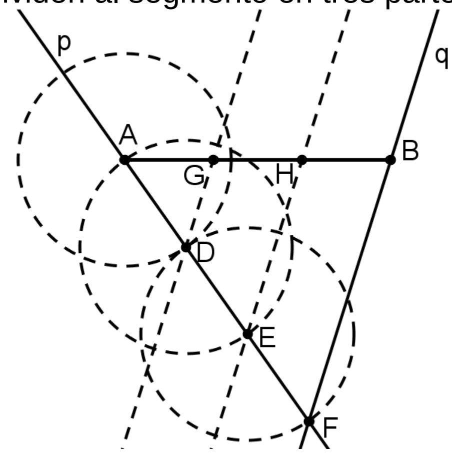


1.9. Dividir un segmento dado en tres partes iguales. (Método extensivo a n partes)

Dado un segmento

, trazamos una recta p en posición oblicua al segmento que pase por el punto A. Con centro en el punto A, donde la recta se interseca con el segmento, dibujamos una circunferencia de radio conveniente. En el punto donde la circunferencia interseca a la recta, trazamos otra circunferencia con centro en ese punto y el mismo radio que la anterior, luego repetimos el procedimiento con una tercera circunferencia. Sobre la recta p quedarán determinados los puntos D, E y F en los lugares donde las tres circunferencias la intersecan. Trazamos una recta q que pase por los puntos B y F, y luego rectas paralelas a q, que pasen por los puntos D y E. Estas rectas paralelas determinan sobre el segmento

, los puntos G y H, que dividen al segmento en tres partes de igual longitud.



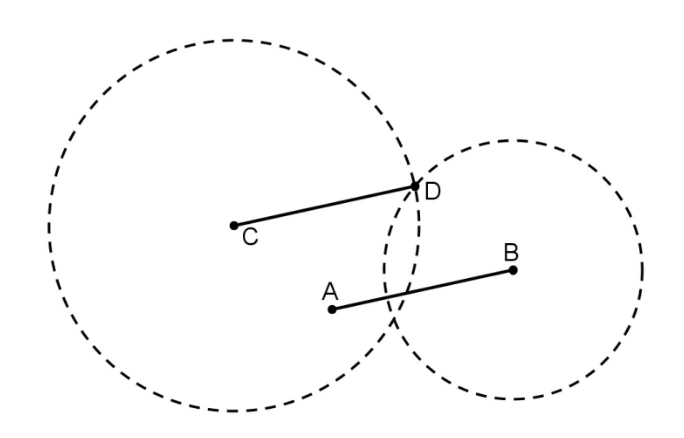
1.10. Transportar un segmento a un punto dado que será su extremo

Dado un segmento

y un punto C exterior al mismo. Trazamos una circunferencia c_1 con centro en C y radio igual a la longitud del segmento

, luego dibujamos una circunferencia c_2 con centro en el punto B y radio igual a la distancia que separa al punto A del C, determinamos así el punto D (lugar donde la circunferencia c_1 interseca a la c_2). Uniendo C con D, transportamos el segmento

al punto C.



Colaborador/as:

- Bardaro, Carla
- Grandi, Nora
- Harboucha, Vera
- Molina, Facundo
-

La geometría euclidiana

En la historia del pensamiento, el matemático griego Euclides (325 a.C. – 265 a. C.) ocupa un lugar destacado. Él supo organizar el conocimiento geométrico de su época y sus propios aportes, dentro de una estructura, en la cual se reconoce el aporte de la lógica y la visión científica de Aristóteles. Euclides logró partir de un número pequeño de principios primeros, para luego, a través de la deducción, armar el cuerpo de la geometría (donde también se incorpora muchos conocimientos de aritmética). Seguiremos la línea de análisis de Beppo Levi[7], para comentar las características básicas de esta geometría.

[7] LEVI, Beppo – *Leyendo a Euclides* – Ed. Libros del Zorzal – Buenos Aires (2006)

En su obra: *Elementos*, Euclides partía de proposiciones que el lector debía aceptar y que pueden dividirse en:

a) Ideas primitivas, son vocablos o signos que aparecían en los postulados, y además en las definiciones y proposiciones que se deducían de estos. Sobre estas ideas primitivas se daba poca precisión y cuando se las representaban, se lo hacía de manera poco objetiva.

b) Postulados (o axiomas), son proposiciones que no se demuestran y que se forman por ideas primitivas unidas con términos lógicos. Los postulados son la base de la teoría deductiva que estructura la obra de Euclides.

c) Definiciones, son en el sentido de la palabra original griega, *confines* o *mojones*, que sirven de guía al lector, además de indicar los límites de un determinado concepto. Las definiciones aparecen también en el principio de cada libro en que está dividida la obra, orientando la lectura de un texto complejo dirigido a personas que tenían un conocimiento claro de la geometría.

La primera definición utilizada por el matemático griego es: *Punto es lo que no tiene partes*, o posiblemente en una traducción más literal: *punto es aquello cuya parte es nada*. La primera traducción se acerca a la noción de *mónada*[8] debida a Pitágoras, la segunda traducción es más abstracta porque alude a algo sin extensión, esta idea se acerca a la palabra *signo* creada por Euclides para precisar la idea de punto (vocablo que en griego se expresaba como *stigma*, etimológicamente derivado de la marca dejada por un instrumento terminado en punta).

En cuanto a sus famosos cinco postulados, estos son:

1°) *Desde cualquier punto a cualquier otro punto se puede trazar un segmento.* Este postulado plantea la existencia y unicidad del segmento que une dos puntos.

2°) *Y cada segmento se puede prolongar por derecho.* Este postulado junto al anterior, nos muestran una de las dos acciones geométricas básicas, el uso de la regla no graduada.

3°) *Y con cada centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.* En este postulado se incorpora el uso del compás, en la práctica no solo para trazar círculos (o circunferencias) sino también para trasladar medidas. La regla no

[8] Para Pitágoras, "uno" no era un número sino la mónada sobre la cual se forman los números, siendo el primer número, el dos. El punto entendido como mónada sería el elemento que conforma todos los demás entes geométricos, dado que si el punto no tiene partes, es porque es tan pequeño que no puede ser dividido.

graduada y el compás son los únicos instrumentos aceptados por la geometría griega.

4°) *Los ángulos rectos son iguales.* En este postulado se hace referencia a los ángulos y a la igualdad de una forma no muy clara, los especialistas están bastante en desacuerdo con respecto a la razón por la cual aparece esta forma de enunciado, de todas maneras coinciden en que parece estar relacionado con la posibilidad de transportar ángulos. También podría tomarse como una alusión a otro instrumento común en la geometría: la escuadra que no solo permite el trazado de ángulos rectos sino que además (con la ayuda de la regla) facilita el trazado de líneas paralelas, de todas maneras, la regla y el compás, pueden suplir este tercer instrumento.

5°) *Y si una recta, al encontrar otras dos, forma con estas ángulos internos de una misma parte menores* (entendido como suma menor) *que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encuentran de aquella parte donde las suma de los ángulos es menor que dos rectos.* Este último postulado fue por mucho tiempo motivo de discusión, sobre todo porque no resultaba a simple vista *evidente*. Se buscó en un principio sustentarlo desde los otros axiomas, sin lograr resultados.

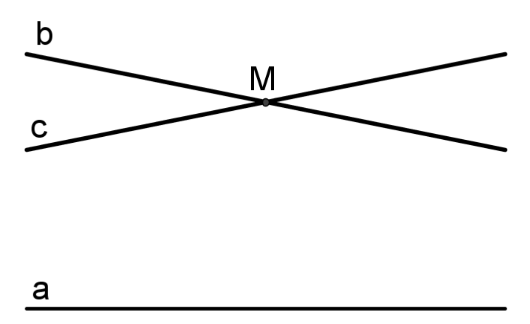
La dudosa independencia del quinto postulado

El quinto postulado no parecía independiente de los otros cuatro, muchos suponían que era innecesario y que debería de haber una forma de transformarlo en un teorema, pudiendo probar su consistencia desde otros axiomas y/o teoremas. En esta búsqueda se descubre que el problemático postulado podía expresarse de otras formas, como la siguiente: *Por un punto exterior a una recta solo puede trazarse una recta paralela*. Por este motivo al quinto postulado, se lo conoce como el postulado de las paralelas.

Sera el matemático italiano Giovanni Saccheri (1667 – 1733), quien dará un giro inesperado al problema, cuando al tratar de hacer una demostración por el absurdo, logra una justificación fallida que termina siendo un acceso a la negación del quinto postulado.

La solución del problema se deberá al alemán Karl Gauss (1777 – 1855), al ruso Nikolai Lobachewsky y al húngaro János Bolyai Estos autores prescindieron del quinto postulado y aceptaron que dada una recta *a* y un punto exterior M, es posible trazar por M varias rectas no secantes todas ellas contenidas por un ángulo que tiene como vértice el punto M y como lados dos rectas *b* y *c* (rectas paralelas a la recta *a* que pasan por el punto M) de esta forma se crea la llamada geometría hiperbólica. En el caso particular que dos rectas *p* y *q* (paralelas a la recta *a* que pasan por el punto M) coincidieran estaremos en el terreno de la geometría parabólica (la conocida geometría de Euclides). La geometría

hiperbólica demuestra ser totalmente compatible, respondiendo a una estructura similar a la euclidiana.



Los descubrimientos de Lobachewsky pueden ser resumidos en:

a) El quinto postulado no puede ser probado.

b) Añadiendo a los cuatro postulados primeros, la negación del quinto postulado es posible desarrollar una geometría extensa basada en una lógica perfecta.

c) Estas geometrías alternativas no solo poseen solidez lógica, sino me pueden abrir nuevos camino y métodos en las ciencias físicas.

La geometría elíptica es otra geometría no euclidiana, en ella por un punto M no puede trazarse ninguna recta paralela a la recta *a*. Un modelo de esta geometría es la esfera donde las rectas usuales se transforman en circunferencias máximas y como estas circunferencias se intersecan todas entre sí, no existen rectas paralelas dentro del modelo.

2. Triángulos

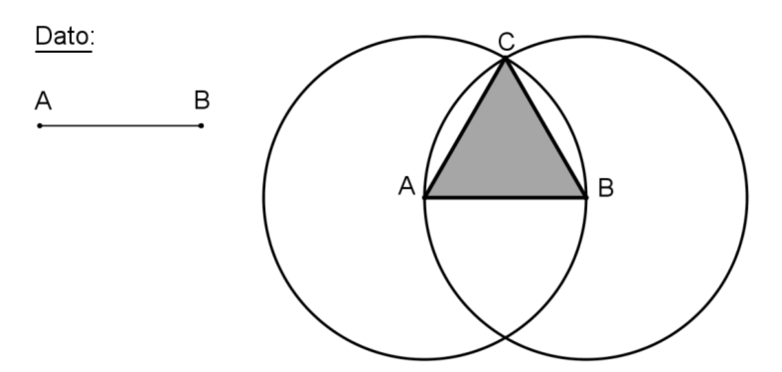
2.1. Construir un triángulo equilátero conociendo la longitud de sus lados

Para construir un triángulo equilátero[9] cuyos lados tengan la longitud de un segmento

dado, se trazan dos circunferencias de radio

. Una con centro en el punto A y otra con centro en el punto B. El intersecado superior de las circunferencias determina el punto C y al trazar los segmentos y

, queda determinado el triángulo buscado.



2.2. Construir un triángulo conociendo las longitudes de sus tres lados

Para la construcción de un triángulo de lados cuyas longitudes sean las de los segmentos dados:

[9] Los triángulos equiláteros tienen lados y ángulos congruentes entre sí, una de sus propiedades es que sus alturas coinciden con sus medianas y bisectrices.

,

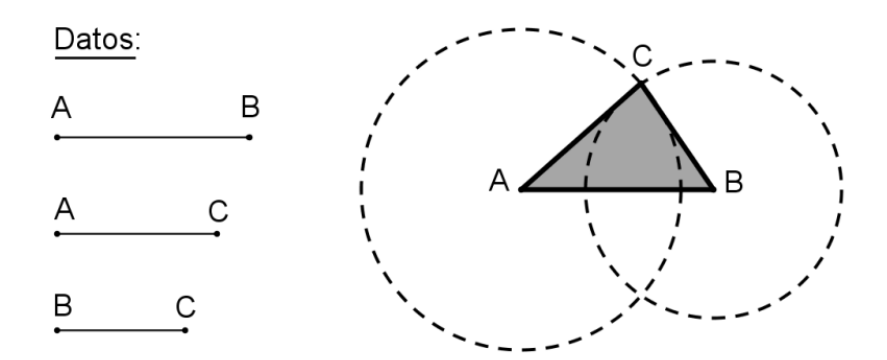
y

, se comienza por establecer uno de los segmentos como base (por ejemplo:

). Luego, se traza una circunferencia de radio

con centro en el punto A y otra circunferencia de radio

con centro en punto B. El intersecado superior de estas circunferencias determina el punto C, al unir los puntos A con C y B con C mediante segmentos, queda graficado el triángulo buscado.



2.3. Construir un triangulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido

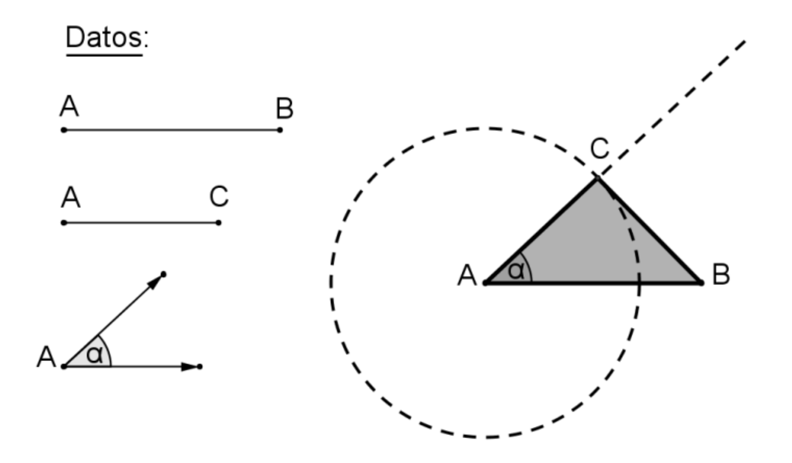
Trazar el lado de mayor longitud (

) que será usado como base. Luego marcar el ángulo α con vértice en el punto A[10], a continuación trazar una circunferencia con centro en A y radio de longitud igual al otro lado conocido (

). El intersecado del lado oblicuo del ángulo con la circunferencia determina el punto C. Por último, al unir el punto C con B se obtiene el tercer lado del triángulo que queda entonces representado.

---

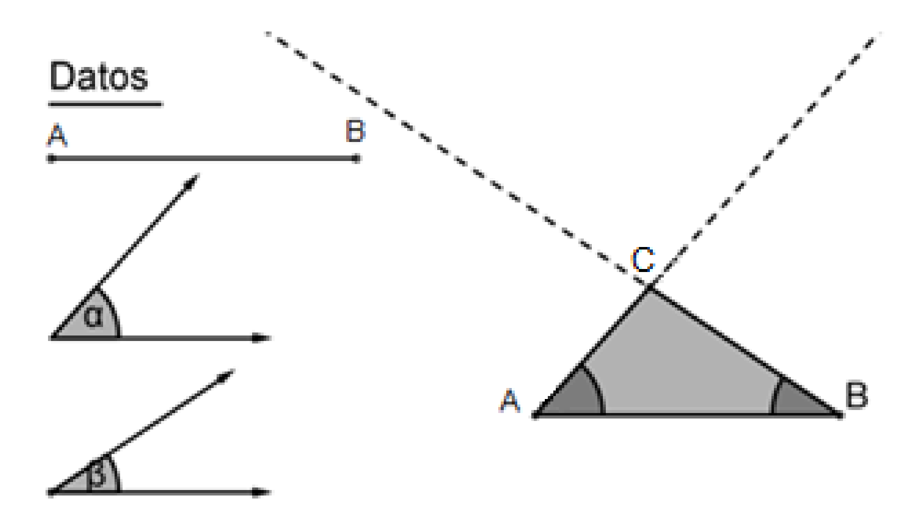
[10] Ver construcción 1.6



2.4. Construir un triángulo conociendo su base y los dos ángulos adyacentes

Dibujar el segmento

, como base del triángulo que se construirá. Sobre la base y con vértice en A trazar el ángulo , luego también sobre la base y con vértice en B trazar el ángulo β. El intersecado de los lados oblicuos de los ángulos α y β determina el punto C. Uniendo C con los puntos A y B queda construido el triángulo buscado.



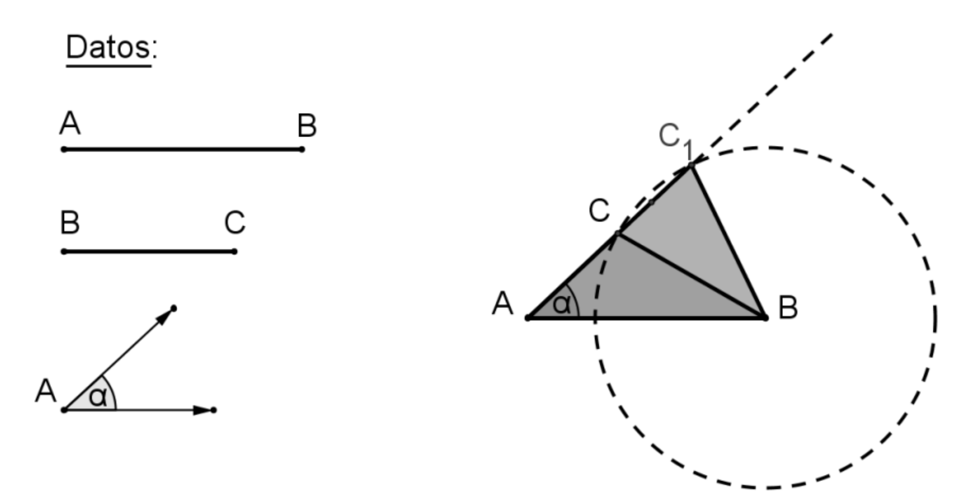
2.5. Construir un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto al primer lado

Tomar como base del triángulo un lado de longitud igual al segmento

, luego marcar el ángulo α con vértice en el punto A, después dibujar una circunferencia con centro en B y radio

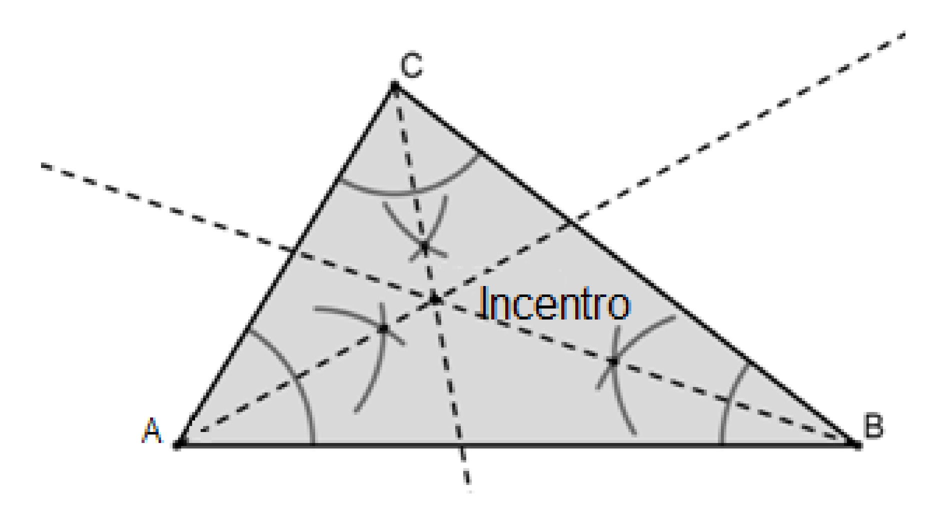
. En los puntos de intersecado de la circunferencia con el lado oblicuo del ángulo α se determina los puntos C y C_1. Por último, al unir mediante segmentos los puntos

C y C_1 con los puntos A y B quedan construidos los triángulos buscados. Si $\geq$ solo se forma un triángulo.



2.6. Trazar las bisectrices de un triangulo dado

Para trazar las bisectrices de un triángulo dado, se obtiene la bisectriz de cada uno de los ángulos aplicando el método utilizado en la construcción 1.7.[11]



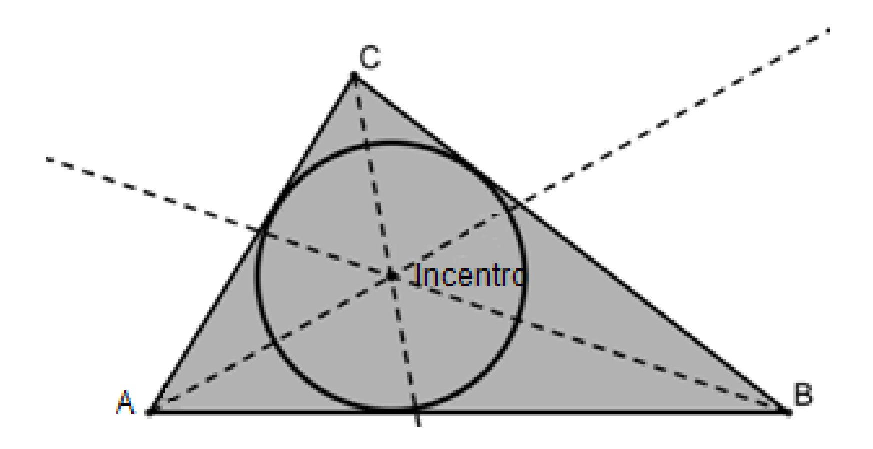
2.7. Trazar la circunferencia inscripta en un triángulo dado

La construcción anterior nos permite encontrar el punto llamado incentro. El incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo, este punto es además el centro de la circunferencia[12] inscripta en el triángulo.

---

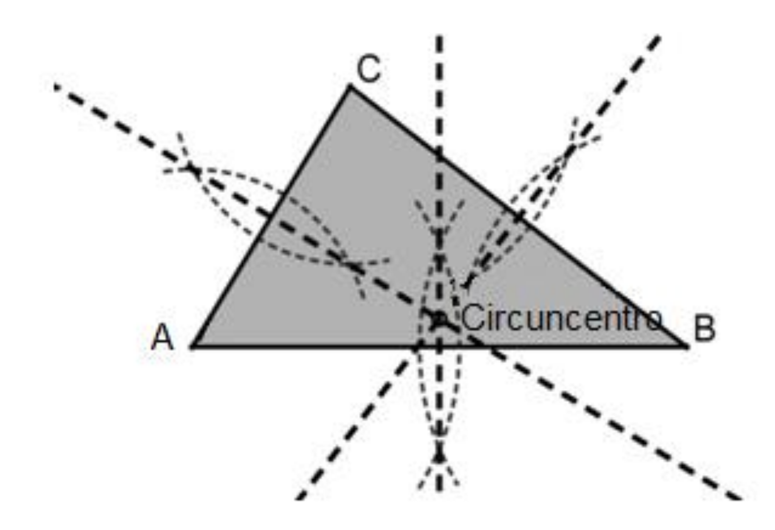
[11] Los programas geométricos informáticos permiten el trazado de las bisectrices mediante una herramienta específica.

[12] Una circunferencia es una línea curva formada por los puntos que equidistan de un punto llamado centro, perteneciendo todos los puntos a un mismo plano.



2.8. Trazar las mediatrices de un triángulo dado

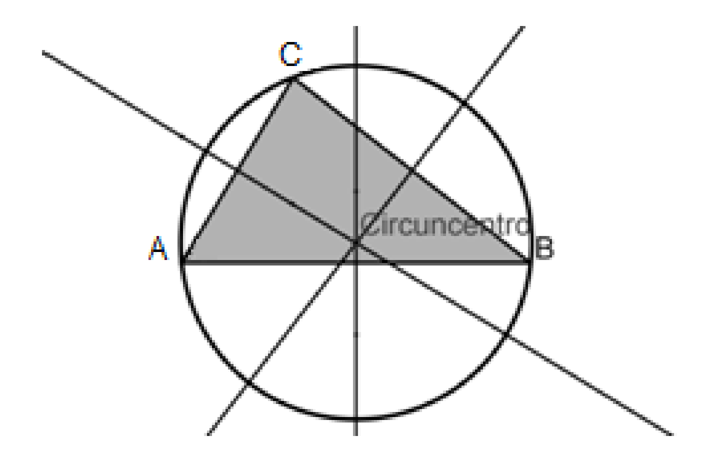
Para trazar las mediatrices de un triángulo dado utilizaremos como referencia la construcción 1.5, tomando las rectas perpendiculares que pasan por el punto medio de un segmento (en este caso los lados) como las mediatrices de cada lado[13]. Al punto donde se intersecan las tres mediatrices se lo denomina circuncentro.



2.9. Trazar la circunferencia que circunscribe a un triángulo dado

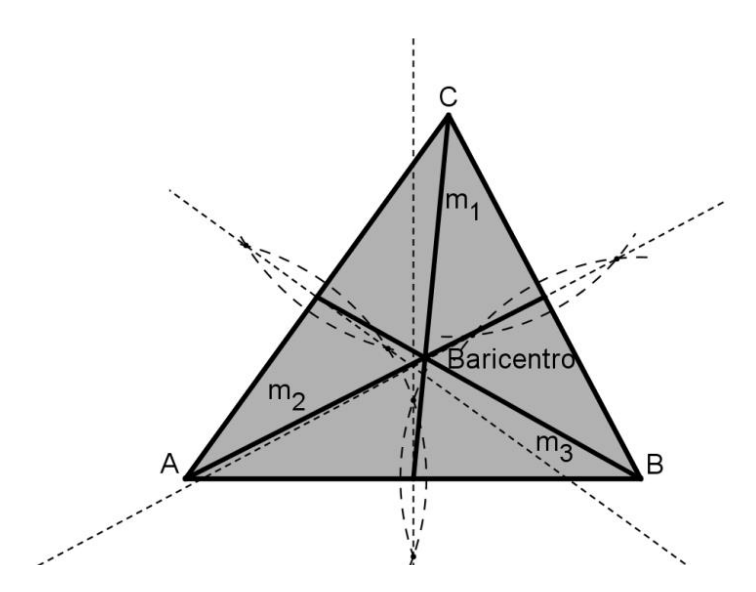
La construcción 2.8. nos permite encontrar el punto llamado circuncentro. El circuncentro es el punto donde se intersecan las tres mediatrices de un triángulo, este punto es, además, el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo (circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo).

[13] Los programas geométricos informáticos permiten el trazado de las mediatrices mediante una herramienta específica.



2.10. Trazar las medianas de un triángulo dado

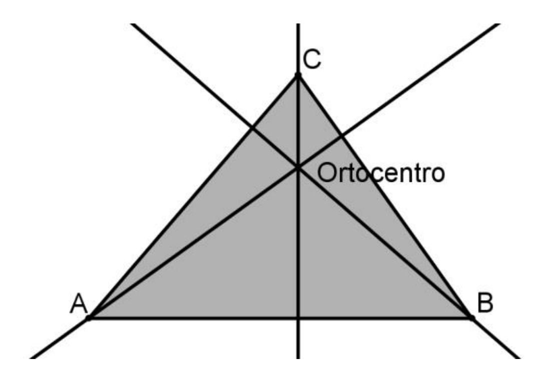
Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen los vértices del mismo triangulo con el punto medio del lado opuesto de la figura. Por medio de la construcción 1.5. obtenemos el punto medio de cada lado para poder representar las medianas. El punto donde se intersecan las medianas es llamado baricentro, punto que coincide con el centro de gravedad en todo cuerpo que tenga forma de placa triangular.



2.11. Trazar las alturas de un triángulo dado

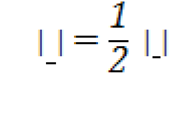
Las alturas de un triángulo son las rectas que pasan por los vértices y que son perpendiculares al lado opuesto. Para trazarlas se puede utilizar el método

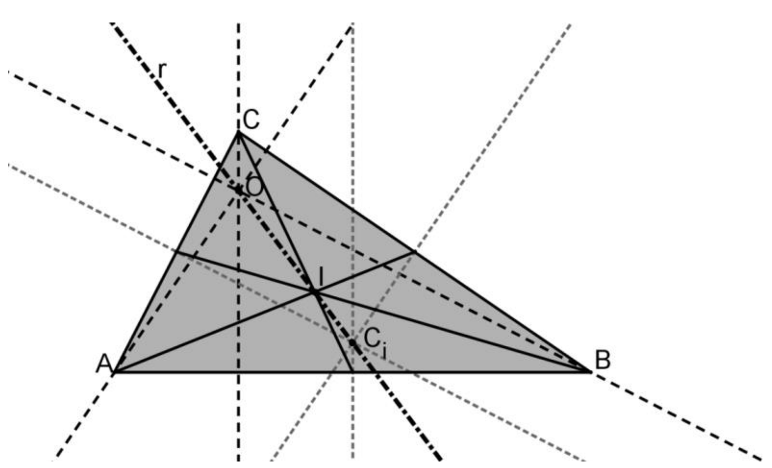
planteado en la construcción 1.2.[14] Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro.



Nota:

En todo triángulo no equilátero[15], el punto equidistante de los tres vértices (incentro, punto I en el dibujo), el punto donde se intersecan las tres medianas (circuncentro, punto C_i en el dibujo) y el punto común a las tres alturas (Ortocentro, punto O en el dibujo) se encuentran alineados sobre una recta (en el dibujo corresponde a la recta r) Siendo la distancia entre el primero de estos puntos y el segundo, la mitad que la distancia determinada entre el primero y el tercero.





3. SEGMENTOS DE LONGITUD IRRACIONAL

---

[14] Los programas geométricos informáticos permiten el trazado de las alturas de un triángulo mediante la herramienta que se utiliza para trazar perpendiculares.

[15] ORTEGA Y SALA, Miguel – *Geometría – Tomo I – Parte elemental* – Ed. Librería de los Sucesores de Hernando – Madrid (1914) – p. 82

3.1. Dado un cuadrado, construir otro que duplique su área

El filósofo griego Platón (427 a.C. – 347 a.C) fue proveniente de una familia noble y aristocrática, tuvo el honor de haber sido alumno de Sócrates y maestro de Aristóteles. Junto a su discípulo crearon gran parte del corpus de creencias centrales del pensamiento occidental. En matemática se lo conoce por resolver el problema de la duplicación del área del cuadrado, encerrando su solución una demostración del Teorema de Pitágoras:

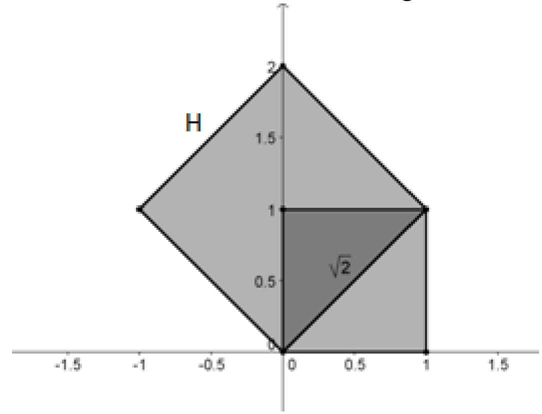
$$^{2} = ^{2} + ^{2}$$

$$^{2} = 1^{2} + 1^{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

Siendo H la longitud de los lados del cuadrado parado sobre un vértice, que duplica el área del cuadrado apoyado sobre un lado.

En la siguiente imagen se observa la resolución gráfica:



3.2. Dado un segmento que representa un número n, hallar el segmento correspondiente a la raíz cuadrada de este número ($\sqrt{n}\sqrt{}$).

Las raíces cuadradas fueron uno de los primeros desarrollos de la matemática, siendo particularmente investigadas durante el período pitagórico, cuando se descubrió que la raíz cuadrada de dos era irracional (no podía expresarse como cociente) lo que supuso un hito en la matemática de la época. Posteriormente se fue ampliando la definición de raíz cuadrada. Para los números reales negativos, la generalización de la función raíz cuadrada de éstos, da lugar al concepto de los números imaginarios y al cuerpo de los números complejos. Las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos, son siempre números irracionales.

Una raíz cuadrada puede ser construida con regla y compás. En las proposiciones II.14 y VI.13 de los *Elementos*, Euclides (300 a.C.) mostró la construcción de la media geométrica de dos cantidades. Dado que la media geométrica de a y b es $\sqrt{.}$, uno puede construir $\sqrt{}$ simplemente tomando: *b = 1*. Esta construcción también fue incluida por Descartes en su libro: *La Géométrie*. No obstante, Descartes no afirmó su originalidad y su audiencia habría estado bastante familiarizada con el libro de Euclides.

Para calcular la raíz cuadrada de un número mediante una construcción geométrica los pasos a seguir son los siguientes:

1. Trazamos un segmento *n* de la longitud del número del cual queremos encontrar su raíz cuadrada.

2. Extendemos ese segmento de medida *n* en 1, en la unidad de medida que hayamos tomado el otro valor, de modo que tengamos el segmento

   de medida *(n + 1)*

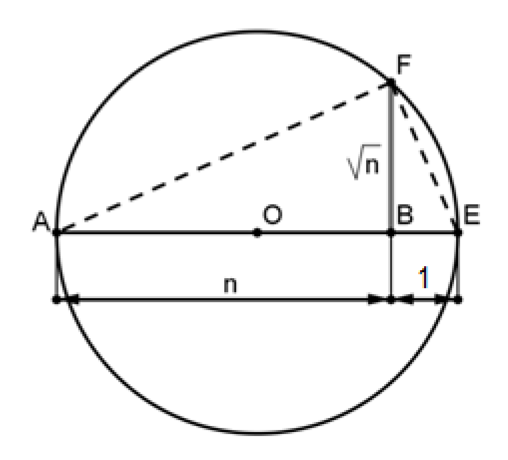
3. Trazamos una circunferencia que tenga como diámetro[16] la medida de *n + 1*

4. En el punto B, que es donde empieza la extensión de medida 1 en el segmento, trazamos una línea perpendicular al segmento trazado. La línea obtenida que va del punto B hasta intersecar la circunferencia determinando el punto F, tiene como medida

   = $\sqrt{}$.

Esta forma de obtener raíces cuadradas de un número se relaciona con el estudio de los números llamados construibles:

[16] El diámetro es un segmento al cual pertenece el centro y dos puntos de una circunferencia.



3.3. Dado un segmento unitario, construir un segmento de longitud equivalente a la raíz cuadrada de cinco ($\sqrt{5}\sqrt{5}$)

La raíz cuadrada de 5 es el número real positivo que, cuando es multiplicado por sí mismo, da el número primo 5. Este número es notable, en parte, porque aparece en la fórmula del número áureo. Puede ser denotado como $\sqrt{5}$, siendo un número irracional algebraico. Geométricamente es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 1 y 2 respectivamente, lo que puede comprobarse mediante el teorema de Pitágoras:

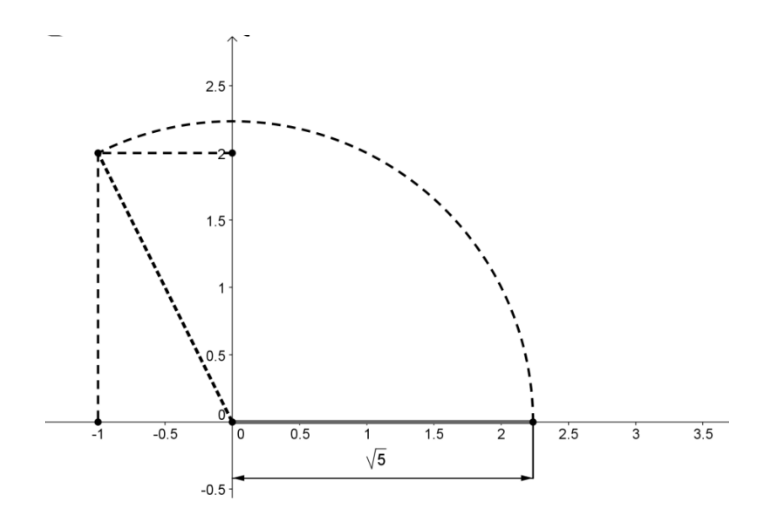
$$^2 = ^2 + ^2$$

$$^2 = 1^2 + 2^2$$

$$= \sqrt{5}$$

Y su valor con 10 cifras decimales por truncamiento es: 2,2360679774.
Puesto que $\sqrt{5}$ está geométricamente ligada a los semi-cuadrados y a los pentágonos, también aparece con frecuencia en las fórmulas vinculadas con las características geométricas de las figuras derivadas de ellas, por ejemplo en la fórmula del volumen de un dodecaedro. A la raíz cuadrada de 5 también podemos encontrarla en varias identidades de Ramanujan que implican fracciones continuas.

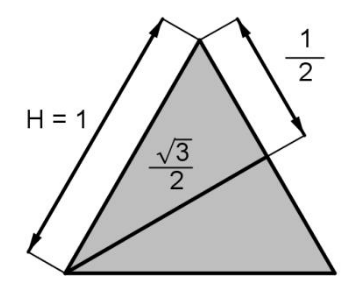
En el siguiente gráfico se observa su construcción:



3.4. Dado un segmento unitario, construir un segmento de longitud equivalente a la raíz cuadrada de tres ($\sqrt{3}$)

La raíz cuadrada de tres es un número real positivo que cuando es multiplicado por sí mismo da el número tres. Se denota por $\sqrt{3}$, siendo su valor numérico por truncamiento con diez cifras decimales de 1,7320508075.

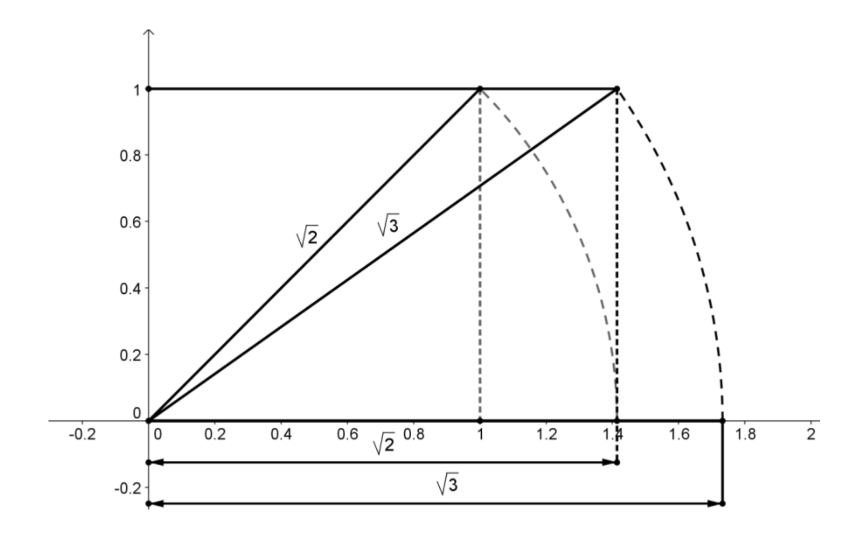
La raíz cuadrada de 3 es un número irracional, también se conoce como constante de Teodoro, nombrada así en honor a Teodoro de Cirene. Si a un triángulo equilátero con lados de longitud uno, lo dividimos en dos partes iguales, bisecando un ángulo interno para formar un ángulo recto con el lado opuesto, obtenemos el triángulo de hipotenusa de longitud uno y los catetos de longitud $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$**.** De esto resulta que la función trigonométrica tangente de 60º es igual a $\sqrt{3}$.



La raíz cuadrada de 3 también es igual a la diagonal[17] de un cubo cuyas aristas tengan una longitud de valor 1, esto puede ser demostrado por el teorema de Pitágoras.

---

[17] Diagonal es un segmento que tiene por extremos dos vértices no consecutivos de un polígono.



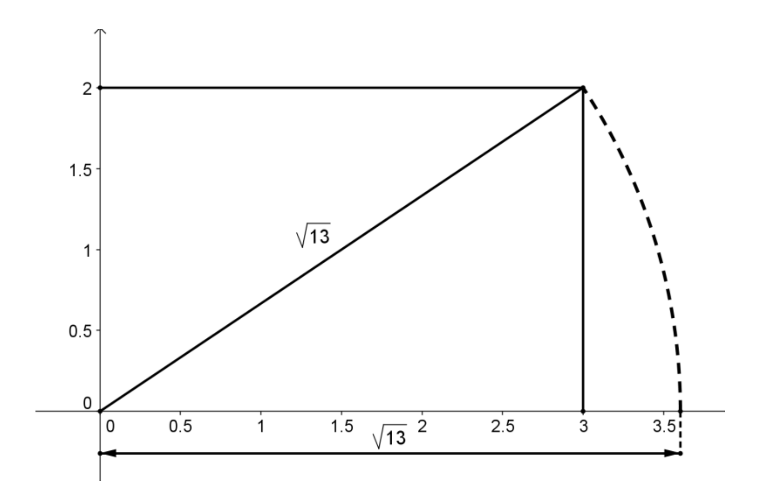
3.5. Dado un segmento unitario, construir un segmento de longitud equivalente a la raíz cuadrada de trece ($\sqrt{13}$)

La raíz cuadrada de 13 es el número real positivo que, cuando es multiplicado por sí mismo, da el número primo 13. Este número es notable en parte porque aparece en la fórmula del número de bronce. La raíz cuadrada de 13 es un número irracional algebraico. Geométricamente es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 3 y 2 respectivamente, lo que puede comprobarse mediante el teorema de Pitágoras:

$$^2 = ^2 + ^2$$

$$^2 = 1^2 + 2^2 \; ^2 = 3^2 + 2^2$$
$$= \sqrt[2]{13}$$

Y su valor con 9 cifras decimales por truncamiento es 3,605551275.



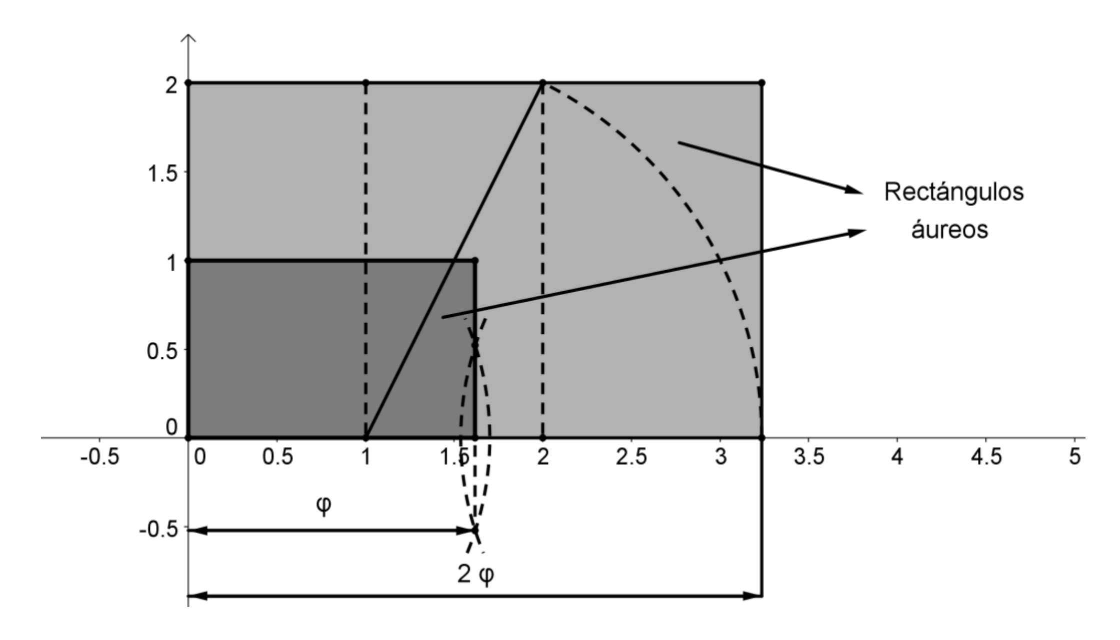
3.6. Construir un rectángulo áureo

La familia de los números metálicos está formada por las raíces positivas de las ecuaciones de forma $x^2 = p\,x + q$, o su equivalente $x^2 - p\,x - q = 0$, donde p y q son números enteros positivos, el más significativo entre estos, es el número áureo que surge en la antigua Grecia como proporción entre dos segmentos. Se parte de crear dos segmentos a y b (donde a es mayor que b) de forma tal que la relación entre la suma de los segmentos y el segmento mayor sea igual a la relación que se obtiene del segmento mayor a y el segmento menor b.

$$= \frac{1 + \sqrt[2]{5}}{2} \approx 1{,}618034\ldots$$

El escultor griego Fidias fue uno de los primeros en aplicar la divina proporción a sus obras, entre estas se encuentran las esculturas de la diosa Atenea en la Acrópolis de Atenas y la estatua sentada de Zeus en Olimpia. Gracias a esto el número áureo se representa con la inicial de su nombre escrito en griego (phi).

Platón (428 - 347 a.C.) fue el primero en estudiar de modo formal la sección áurea, la consideró como la mejor de todas las relaciones matemáticas y la llave a la física del Cosmos. Se creía que era la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo. Los artistas del renacimiento la utilizaron en ocasiones múltiples tanto en pintura, como en escultura y arquitectura para lograr el equilibrio y la belleza. Se puede observar en la pintura: *La Última Cena* y en el rostro de la Gioconda de Leonardo Da Vinci; hoy en día el rectángulo áureo se ve reflejado en las tarjetas de crédito, en el carnet de identidad y en las cajetillas de cigarrillos. En arquitectura está presente, por ejemplo, en el conocido edificio de la ONU en Nueva York, el cual es un gran prisma rectangular cuya cara mayor sigue las proporciones del rectángulo áureo. A continuación observamos la construcción del rectángulo áureo.



3.7. Construir una espiral áurea

En 1509, el matemático y teólogo, Luca Pacioli publicó su libro: *De Divina Proportione* (La Proporción Divina), en el que plantea cinco razones por las que considera apropiado considerar divino al número áureo:

a) La unicidad; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.

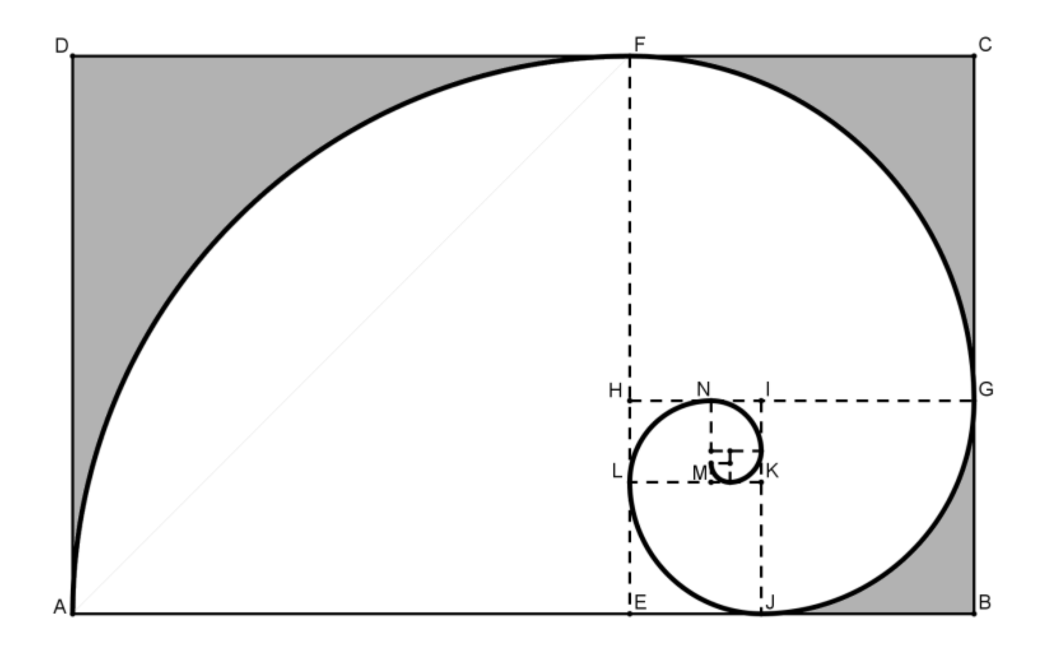
b) El hecho de que esté definido por tres segmentos de rectas, Pacioli lo asociaba con la trinidad.

c) La inconmensurabilidad; para Pacioli la inconmensurabilidad del número áureo y la de Dios son equivalentes.

d) La autosimilaridad asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.

e) Según Pacioli, de la misma manera en que Dios otorgó ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro, el número áureo dió ser al dodecaedro.

Da Vinci hizo las ilustraciones del libro de Pacioli, en el cual podemos observar los dibujos de los cinco sólidos platónicos. Es probable que fuera Leonardo quien usara por primera vez, el nombre de sección áurea. En 1525, Alberto Durero publicó una instrucción sobre la medida con regla y compás de las figuras planas y sólidas, en la que describe como trazar la espiral basada en la sección áurea, que se conoce como espiral de Durero.

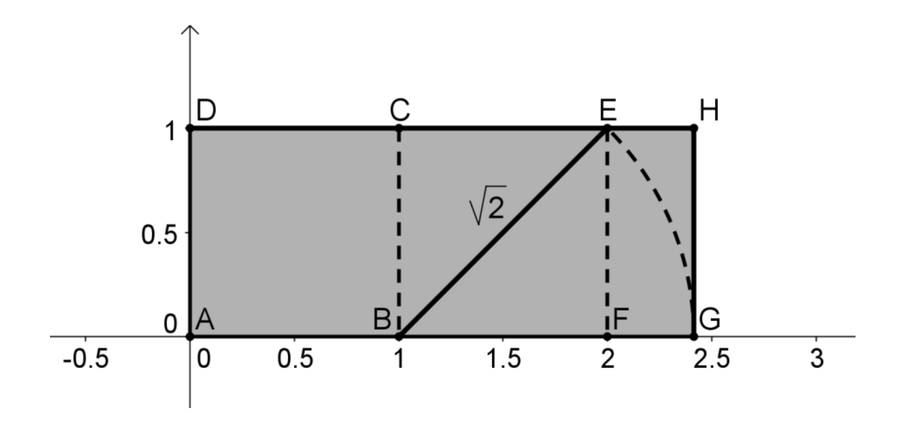


3.8. Construir un rectángulo cuyos lados tengan como relación proporcional, el número de Plata

Dentro de la familia de los números metálicos encontramos al número de Plata $= 1 + \sqrt[2]{2} \approx 2{,}4142135623$…, este proviene de la ecuación $^{2} - \; 2 - 1 = 0$, cuya solución positiva es $1 + \sqrt[2]{2}$, siendo su expresión en fracción continua:

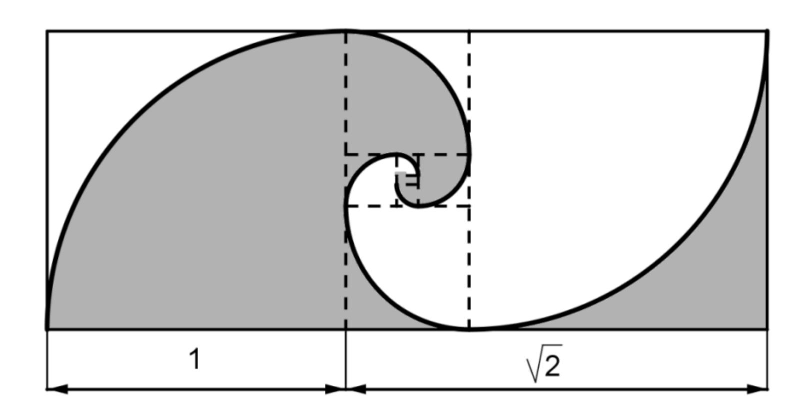
$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

En la antigua ciudad de Ostia (Roma), arquitectos del Siglo II d. C., diseñaron un conjunto de edificios a partir de un cuadrado patrón: el *cuadrado del corte sagrado*, en el que se oculta el número de Plata. También aparece en el octógono regular como la razón entre el lado y la diagonal. Habitualmente se observa en objetos cotidianos rectangulares, principalmente en rectángulos que encierran logotipos y anuncios en la prensa escrita. La relación entre los lados de estos rectángulos es el número de Plata.



3.9. Construir una espiral doble basada en el número de Plata

Comenzamos con un rectángulo de Plata y obtenemos sucesivamente cuadrados como se indica en el gráfico siguiente. El trazado conveniente de arcos de circunferencia que unan vértices opuestos de los cuadrados, determinará la gráfica de una espiral doble en forma de ola.



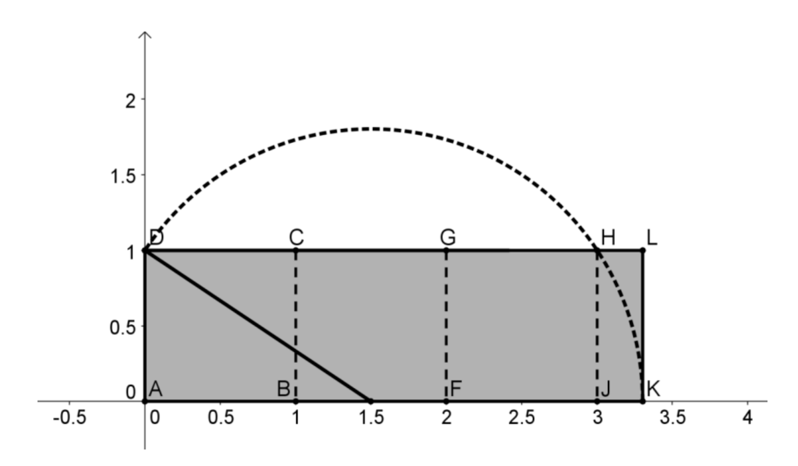
3.10. Construir un rectángulo cuyos lados tengan como relación proporcional, el número de Bronce

El número de Bronce proviene de la ecuación ^{2}- 3x – 1 = 0, cuya solución positiva es: $= \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Su expresión en fracción continua es:

$$= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}$$

Su expresión decimal corresponde al número 3,30281…, el cual es el cociente de $\frac{469}{142} = 3{,}30281\ ...$ Estos números (numerador y denominador) corresponden al sexto y séptimo término de la sucesión de Fibonacci.



Colaborador/as:

Díaz, Yesica
Jorge, Walter
Roquero, Yael Desiree
Gurrieri, Natalia
Pardo, Giselle
Ru Ordoñez, Micaela

Nota sobre la cuadratura del rectángulo

El problema 3.2 es la base para observar la forma geométrica de cuadrar un rectángulo, es decir, dado un rectángulo, hallar un cuadrado que posea el mismo valor de área. A partir de los triángulos rectángulos: Δ , Δ y Δ , se pueden establecer (basándonos en el Teorema de Pitágoras[18]) las siguientes igualdades:

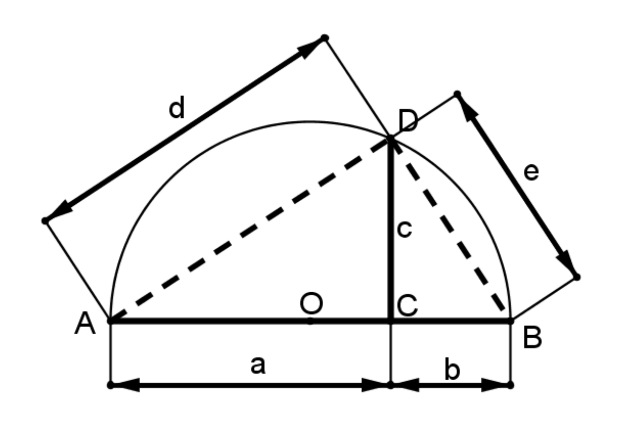
$$(a + b)^2 = d^2 + e^2 \quad (1)$$
$$d^2 = a^2 + c^2$$
$$e^2 = b^2 + c^2$$

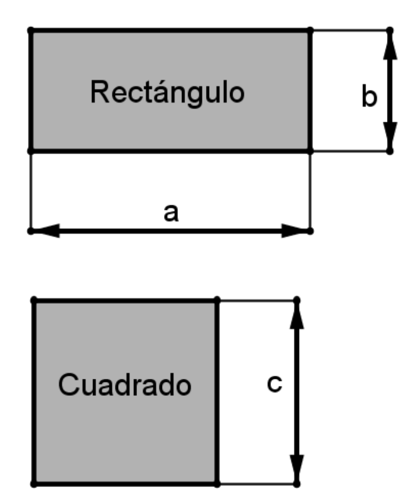
Reemplazando los valores de d^2 y e^2 en la ecuación (1), obtenemos:

$$a^2 + 2ab + c^2 = a^2 + c^2 + b^2 + c^2$$

De donde resulta: $\mathbf{ab = c^2}$, que iguala el área de rectángulo de lados a y b, con el área de un cuadrado de lado c.

[18] En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.





A su vez el problema de cuadrar el rectángulo se relaciona con la obtención de la media proporcional o geométrica[19] entre dos números a y b. Siendo la media proporcional un valor x, que toma el valor de los medios en una proporción continua donde los extremos son a y b. De forma tal que:

$$=$$

Aplicando el teorema fundamental de las proporciones: *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*, se llega a:

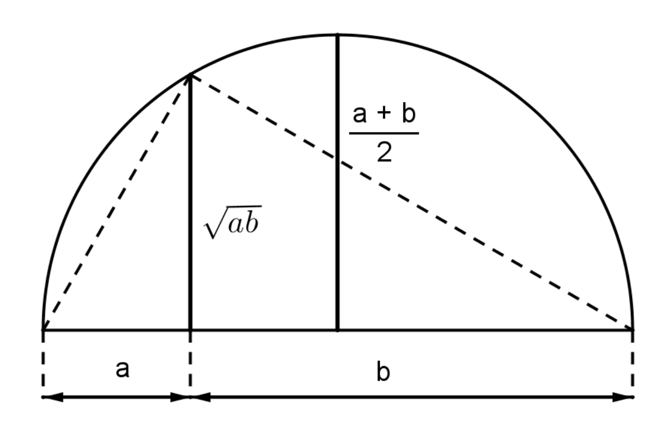
$$^2 = \quad \therefore \quad = \sqrt{\ }$$

De esta manera, hallar la media geométrica entre dos números a y b, equivale a encontrar el lado de un cuadrado cuya área iguala al área de un rectángulo cuya base es a y su largo b. En el gráfico siguiente[20] se observa la relación de desigualdad que se establece entre la media aritmética (comúnmente llamada promedio) y la media geométrica, que solo tienen igual valor en el caso: a = b.

---

[19] DE ALZÁA, FIDENCIO – *Nociones de Geometría Plana – 3° Parte* – Librería de A. García Santos – Buenos Aires (1915) – p. 31

[20] Revista: Q.e.d. Ciencias duras en palabras blandas – Año 1 N° 3 – Setiembre 2009 – UBA (CBC) – Buenos Aires – p. 35



Siendo la relación de desigualdad entre las medias geométrica y aritmética:

$$\sqrt{\ } \leq \frac{+}{2}$$